УДК 512.53, 510.54
DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-3

В. В. Данг, Н. Л. Додонова,
С. Ю. Корабельщикова, Б. Ф. Мельников

SH-СЛАБАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПОЛУГРУПП И МИНИМАЛЬНАЯ ПОЛУГРУППА *SH*-АППРОКСИМАЦИИ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Предметом исследования являются полугруппы и варианты их двойственности и аппроксимации. С помощью операторов взятия всех подполугрупп данной полугруппы и всех ее гомоморфных образов мы получаем класс полугрупп (*A*)*SH*, для которого и рассматриваем вопросы слабой двойственности и аппроксимации. Целью работы является описание взаимосвязей *SH*-слабой двойственности с другими ее типами, а также нахождение минимальной полугруппы для *SH*-аппроксимации полугрупп относительно предиката принадлежности элемента подполугруппе.

Материалы и методы. В работе используются общие методы анализа и синтеза. Также используются специальные методы описания полугрупп и методы работы с ними, в частности, метод построения морфизма полугруппы. Мы строим специальную полугруппу, играющую роль минимальной полугруппы *SH*-аппроксимации относительно нескольких предикатов. В этой полугруппе отсутствуют нулевой и единичный элементы. При этом она содержит бесконечное число идемпотентов.

Результаты. Получено описание взаимосвязей *SH*-слабой двойственности с другими ее типами в общем случае, а также в ряде конкретных примеров. В частности, выяснены связи между различными типами слабой двойственности относительно мультипликативной полугруппы комплексных чисел, равных по модулю 0 или 1, а также относительно мультипликативной полугруппы неотрицательных вещественных чисел. В описанном классе полугрупп нами получена минимальная с точки зрения *SH*-аппроксимации относительно предиката принадлежности элемента полугруппе: явно описаны необходимые и достаточные условия для *SH*-аппроксимации.

Выводы. Одним из важных направлений в современной алгебре является исследование не только самой алгебраической системы, но и производных от нее систем. В центре исследования данной работы находится класс полугрупп (*A*)*SH*, содержащий любой гомоморфный образ любой подполугруппы заданной полугруппы. Изучение условий слабой двойственности и аппроксимации для этого класса дало ряд новых теоретических результатов. Используя установленные в теореме 1 взаимосвязи, можно распространять полученные результаты на другие классы полугрупп, образованные теми или иными операторами Биркгофа.

Ключевые слова: полугруппа, слабая двойственность, *SH*-слабая двойственность, аппроксимация, *SH*-аппроксимация, минимальная полугруппа аппроксимации.

[1] This research is funded by Ho Chi Minh City University of Technology under grant number T-KHUD-2018-86.

V. V. Dang, N. L. Dodonova,
S. Yu. Korabel'shchikova, B. F. Mel'nikov

SH-WEAK DUALITY OF SEMIGROUPS AND MINIMUM SEMI-GROUP OF *SH*-APPROXIMATION

Abstract.

Background. The subject of the study are semigroups and variants of their duality and approximation. Using the operators of taking all subsemigroups of a given semigroup and all its homomorphic images, we obtain the class of semigroups (A)SH, for which we consider questions of weak duality and approximation. The aim of the paper is to describe the interconnections of SH-weak duality with its other types, as well as to find the minimal semigroup for SH-approximation of semigroups relative to the predicate of the element belonging to the subsemigroup.

Materials and methods. In the paper, the general methods of the analysis and synthesis are used. Special methods of describing semigroups and methods of working with them, in particular, the method of constructing the morphism of the semigroup are also used. We construct a special semigroup playing the role of the minimal semigroup of SH-approximation with respect to several predicates. In this semigroup, there are no zero and single elements. Moreover, it contains an infinite number of idempotents.

Results. A description of the interrelationships of SH-weak duality with its other types in the general case is obtained, as well as in a number of specific examples. In particular, connections between various types of weak duality with respect to the multiplicative semigroup of complex numbers equal in absolute value to 0 or 1, as well as to the multiplicative semigroup of non-negative real numbers, have been clarified. In the class of semigroups described, we have obtained the minimal from the point of view of SH-approximation with respect to the predicate of an element belonging to a semigroup: the necessary and sufficient conditions for the SH-approximation are explicitly described.

Conclusion. One of the important directions in modern algebra is the study of not only the algebraic system itself, but also systems derived from it. The focus of the study of this paper is the class of semigroups (A)SH, containing any homomorphic image of any subsemigroup of the given semigroup. A study of the conditions of weak duality and approximation for this class gave a number of new theoretical results. Using the relationships established in Theorem 1, one could extend the obtained results to other classes of semigroups formed by some Birkhoff operators.

Keywords: semigroup, weak duality, SH-weak duality, approximation, SH-approximation, minimal semigroup of approximation.

Введение

Настоящая статья является продолжением статей [1–3], но в отличие от них, данная работа настоящая статья посвящена конкретному варианту аппроксимации алгебраических объектов – *SH*-аппроксимации [4] и др.

Как мы уже отмечали в предыдущих публикациях, общая концепция аппроксимации алгебраических систем была сформулирована академиком А. И. Мальцевым [5] и др. Он показал связь между аппроксимацией алгебраических систем относительно некоторого заданного (абстрактного) предиката и задачей разрешимости этого предиката в рассматриваемой системе. А необходимые и достаточные условия аппроксимации *полугрупп* относительно *конкретных* предикатов были рассмотрены в [4, 6–8] и др. При этом в первую очередь рассматривалось понятие конечно-аппроксимируемой полугруппы и такие предикаты, как:

– равенство;

– принадлежность элемента подполугруппе;

– принадлежность элемента подгруппе;

– отношение сопряженности (см. [9] и др.);

– четыре из пяти отношений Грина, а именно отношения L-, R-, H- и D-эквивалентности (см. [10] и др.);

– принадлежность элемента некоторой циклической подполугруппе (см. [11]).

Также в вышеупомянутых публикациях были получены некоторые результаты для этих задач.

Как и в наших предыдущих публикациях, мы описываем некоторую полугруппу, которая относительно рассматриваемого предиката является минимальной полугруппой аппроксимации. В этой полугруппе отсутствуют нулевой и единичный элементы. При этом она содержит бесконечное число идемпотентов, причем существование каждого из идемпотентов является необходимым условием.

1. Предварительные сведения

Важным направлением развития современной алгебры является изучение алгебраических систем, а также целых классов алгебраических систем. Наиболее важными из них являются абстрактные классы, т.е. содержащие с каждой системой и ей изоморфные. Например:

• $(K)S$ – класс всех систем, изоморфных подсистемам систем из K;

• $(K)H$ – класс всех систем, изоморфных фактор-системам систем из K;

• $(K)P$ – класс всех систем, изоморфных прямым произведениям систем из K.

Здесь S, H, и P можно рассматривать как операторы.

В 1972 г. Пигоцци [12] рассмотрел полугруппу, порожденную операторами S, H, P, относительно операции композиционного умножения, и показал, что она конечна и содержит следующие 17 элементов: H, S, P, HS, HP, SP, PS, SH, PH, HSP, SPH, PHS, HPS, SHP, PSH, $SPHS$, $SHPS$. В дальнейшем все эти операторы получили название операторов Биркгофа [13].

Определение 1. Полугруппы A и B называются слабо двойственными относительно коммутативной полугруппы C, если существует билинейное отображение

$$f : A\times B \to C ,$$

такое что выполнены следующие условия:

1) для любых $a_1, a_2\in A$ (полагаем, что $a_1\neq a_2$) существует $b\in B$ такой, что $f(a_1, b)\neq f(a_2, b)$;

2) для любых $b_1, b_2\in B$ (полагаем, что $b_1\neq b_2$) существует $a\in A$ такой, что $f(a, b_1)\neq f(a, b_2)$. □

Пусть C – коммутативная полугруппа, $K = \{A\}$ – одноэлементный класс полугрупп, X – некоторый оператор Биркгофа, $(K)X = (\{A\})X$ – класс полугрупп, образованный с помощью оператора X (мы обычно будем опускать фигурные скобки и писать $(A)X$).

Определение 2. В случае, когда все полугруппы из класса $(A)X$ слабо двойственны относительно полугруппы C, будем говорить, что полугруппа AX слабо двойственна относительно C. В частности, полугруппа A SH слабо двойственна относительно полугруппы C тогда и только тогда, когда все полугруппы из класса $(A)SH$ слабо двойственны относительно полугруппы C. □

2. *SH*-слабая двойственность и *SH*-аппроксимация полугрупп

Так как полугруппа операторов Биркгофа насчитывает 17 элементов, будем различать 17 типов слабой двойственности полугрупп.

Если полугруппа A удовлетворяет тем или иным условиям, то возможно совпадение различных классов $(A)X$, образованных операторами Биркгофа. Если же полугруппа C удовлетворяет тем или иным условиям, то возможно совпадение различных типов слабой двойственности.

Определение 3. На полугруппе операторов Биркгофа введем отношение ρ_C. Элементы X и Y находятся в отношении ρ_C тогда и только тогда, когда для любой полугруппы A понятия X и Y слабой двойственности относительно полугруппы C совпадают. □

Ранее [4] было доказано, что для произвольной коммутативной полугруппы C отношение ρ_C разбивает полугруппу операторов Биркгофа не более чем на 6 классов эквивалентности, представителями которых являются элементы S, H, PH, SH, SPH и PSH. Кроме того, справедлива следующая теорема[1].

Теорема 1.

1. Для произвольной полугруппы A из SH-слабой двойственности следуют H и S слабая двойственность, причем в общем случае следственные зависимости не являются обратимыми.

2. Для произвольной полугруппы A SH-слабая двойственность следует из PSH- и SPH-слабой двойственности, причем в общем случае следственные зависимости не являются обратимыми.

3. SH- и PH-слабая двойственность независимы друг от друга. □

Доказательство теоремы 1 также основано на методах и результатах, полученных в [4]. Приведем ряд примеров, демонстрирующих применение теоремы 1. Отметим также, что в частном случае некоторые из типов слабой двойственности могут совпадать.

Пример 1. Пусть C – мультипликативная полугруппа комплексных чисел, равных по модулю 0 или 1. Существует 4 различных типа слабой двойственности полугрупп относительно полугруппы C, а именно PSH-, SH-, H и S-слабая двойственность полугрупп. Цепочка логических следствий будет выглядеть следующим образом: $PSH \Rightarrow SH \Rightarrow H \Rightarrow S$.

Пример 2. Пусть C – мультипликативная полугруппа неотрицательных вещественных чисел, $C = \boldsymbol{R}^+$. Существует два различных типа слабой двойственности полугрупп относительно полугруппы $\boldsymbol{R}^+$, а именно H- и S-слабая двойственность полугрупп. При этом SH- и H-слабая двойственность полугрупп эквивалентны. Из SH-слабой двойственности следуют H- и S-слабая двойственность, причем в общем случае следственная зависимость не является обратимой.

[1] Подробные доказательства мы предполагаем опубликовать в продолжении статьи.

В частном случае некоторые из типов слабой двойственности могут совпадать, и выполняются следующие две теоремы.

Теорема 2. Существует 4 различных типа слабой двойственности полугрупп относительно мультипликативной полугруппы **П** комплексных чисел, равных по модулю 0 или 1, а именно *PSH*-, *SH*-, *H*-, и *S*-слабая двойственность полугрупп. □

Теорема 3. Существует 2 различных типа слабой двойственности полугрупп относительно мультипликативной полугруппы неотрицательных вещественных чисел $\boldsymbol{R}^{+}$, а именно *H*- и *S*-слабая двойственность полугрупп. При этом *SH*- и *H*-слабая двойственность полугрупп эквивалентны. □

Определение 4. Пусть Q – множество всех простых чисел. Для некоторого $p\in Q$ запись G_p обозначает квазициклическую группу типа p^{∞} с единицей e_p и аддитивной операцией, обозначенной $\oplus_p$. Положим $C^{*} = \cup G_p$ (для $p\in Q$). Также определим на множестве C^{*} мультипликативную операцию следующим образом:

$$a_p * a_q = \begin{cases} a_p \oplus_p a_q, & \text{если} \quad p = q, \\ a_{\max\{p,q\}}, & \text{если} \quad p \neq q \quad \text{и} \quad \max\{p,q\} > 3, \\ e_5, & \text{если} \quad p \neq q \quad \text{и} \quad \max\{p,q\} = 3, \end{cases}$$

для всех $a_p\in G_p$, $a_q\in G_q$. □

Непосредственные вычисления показывают, что $C^{*} = (C^{*},*)$ является полугруппой, более того, полурешеткой для множества групп G_p, $p\in Q$.

Далее, пусть A и B – две полугруппы, Φ – множество всех отображений из A в B, а P – предикат, определенный на множестве, содержащем:

– A;

– все подмножества $\delta(A)$ множества A;

– все образы элементов A и $\delta(A)$ относительно элементов множества Φ.

Определение 5. Алгебраическая структура A называется аппроксимируемой отображениями из множества Φ относительно предиката P, если для любой пары подмножеств A_1, A_2 из A, таких что значение $P(A_1, A_2)$ ложно, существует отображение $\varphi\in\Phi$, такое что значение $P(\varphi(A_1),\varphi(A_2))$ также ложно. □

Определение 6. Алгебраическая структура A называется *SH*-аппроксимируемой отображениями из множества Φ относительно предиката P, если каждый образ любой подструктуры множества A относительно отображений из Φ является аппроксимируемым относительно этого предиката. □

Важные комментарии к последним двум определениям можно найти в [14]. Мы рассмотрим введенные здесь объекты в оставшейся части статьи.

3. Минимальная полугруппа *SH*-аппроксимации

Определение 7. Алгебраическая структура B называется минимальной структурой *SH*-аппроксимации для класса K относительно предиката P, если выполняются следующие три условия:

(i) любая структура $A\in K$ является *SH*-аппроксимируемой отображениями в структуру B относительно предиката P;

(ii) если некоторая структура S является *SH*-аппроксимируемой отображениями в B относительно предиката P, то $S\in K$;

(iii) если B_1 – собственная подструктура структуры B, то существует некоторая структура $A \in K$, такая что A не является SH-аппроксимируемой отображениями в B_1 относительно предиката P. □

В настоящей статье алгебраическая структура A всегда будет являться некоторой полугруппой, а алгебраическая структура B – полугруппой C^*; все рассматриваемые отображения из A в C^* являются гомоморфизмами.

Утверждение 1. Пусть $B = \{e_0, e_1\}$ – двухэлементная коммутативная идемпотентная полугруппа, e_0, $e_1 = e_0$. Полугруппа B является минимальной полугруппой аппроксимации для класса полурешеток относительно предиката равенства.

Доказательство. Проверим выполнение всех трех условий из определения минимальной полугруппы аппроксимации.

Пусть A – произвольная полурешетка. Покажем, что полугруппа A аппроксимируема относительно предиката равенства гомоморфизмами в B.

Пусть $a, b \in A$ и $a \neq b$. Тогда $ab \neq b$ или $ab \neq a$. Пусть для определенности верно первое неравенство, т.е. $ab \neq b$. Рассмотрим идеал $I_b = \{\xi \in A \mid \xi b \neq b\}$. Так как $b \notin I_b$, то для гомоморфизма φ, заданного по правилу,

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} e_0, \text{если } \xi \in \mathrm{I}_b, \\ e_1, \text{если } \xi \notin \mathrm{I}_b, \end{cases}$$

получаем $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Теперь покажем, что если полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно равенства, то A – полурешетка.

Пусть $a \in A$ и предположим, что $a^2 \neq a$. Тогда по условию найдется гомоморфизм φ из A в B такой, что $\varphi(a^2) \neq \varphi(a)$.

С другой стороны, учитывая, что полугруппа B идемпотентна, а $\varphi(a) \in B$, получим: $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2 = \varphi(a)$. Пришли к противоречию. Значит, предположение не верно, и для всех $a \in A$, выполнено условие $a^2 = a$, т.е. полугруппа A идемпотентна.

Далее, пусть a, $b \in A$, и предположим, что $ab \neq ba$. Тогда по условию найдется гомоморфизм φ из A в B такой, что $\varphi(ab) \neq \varphi(ba)$.

С другой стороны, учитывая, что полугруппа B коммутативна, получим: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)$. Пришли к противоречию. Значит, предположение не верно, и для всех a, $b \in A$, выполнено условие $ab = ba$, т.е. полугруппа A коммутативна.

Итак, полугруппа A идемпотентна и коммутативна, а значит, является полурешеткой.

Осталось показать, что для всякой собственной подполугруппы B' полугруппы B существует полурешетка A' такая, что A' не аппроксимируема гомоморфизмами в подполугруппу B' относительно предиката равенства. Этот факт очевиден, поскольку любая собственная подполугруппа B' полугруппы B одноэлементна, и, значит, для любого гомоморфизма φ из A' в B' и для любых a, $b \in A'$, будет выполняться равенство $\varphi(a) = \varphi(b)$. Поэтому в качестве A' можно взять любую полурешетку, содержащую более одного элемента. □

Утверждение 2. Полугруппа B из первого примера не может служить минимальной полугруппой аппроксимации для класса полурешеток относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу.

Доказательство. Пусть $B_1 =\{e_1, e_2, e_3\}$ – коммутативная полугруппа, состоящая из трех идемпотентов e_1, e_2 и e_3 таких, что $e_1 = e_1e_2 = e_1e_3$ и $e_2 = e_3e_2$.

Покажем, что B_1 не аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу.

Рассмотрим подполугруппу $A_1 = \{e_1, e_3\}$ полугруппы B_1, $e_2\notin A_1$.

Предположим, что найдется гомоморфизм φ из B_1 в B такой, что $\varphi(e_2)\notin \varphi(A_1)$. Это может выполняться только в следующих двух случаях: $\varphi(b) = e_0$, а $\varphi(A_1) = \{e_1\}$ или, наоборот, $\varphi(e_2) = e_1$, а $\varphi(A_1) = \{e_0\}$.

Рассмотрим первый случай. Имеем $\varphi(e_3) = \varphi(e_1) = e_1$, $\varphi(e_2) = e_0$. С другой стороны, так как $e_1 = e_2e_1$, то $\varphi(e_1) = \varphi(e_2e_1) = \varphi(e_2)\varphi(e_1) = e_0\cdot e_1 = e_0$. Значит, первый случай невозможен.

Рассмотрим второй случай. Имеем $\varphi(e_3) = \varphi(e_1) = e_0$, $\varphi(e_2) = e_1$. С другой стороны, так как $e_2 = e_2a$, то $\varphi(e_2) = \varphi(e_2a) = \varphi(e_2)\varphi(e_3) = e_1\cdot e_0 = e_0$. Значит, второй случай также невозможен.

Следовательно, полугруппа B_1 не аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу. Значит, первое условие из определения минимальной полугруппы аппроксимации не выполняется. □

Лемма 1. Пусть B – коммутативная полугруппа, состоящая из трех идемпотентов e_1, e_2 и e_3 таких, что $e_1 = e_1e_2 = e_1e_3$ и $e_2 = e_3e_2$. Тогда любая коммутативная полугруппа идемпотентов (полурешетка) аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно предиката принадлежности элемента подполугруппе.

Доказательство. Пусть A – произвольная коммутативная идемпотентная полугруппа, A_1 – некоторая подполугруппа полугруппы A, ξ_0 – произвольный элемент из A и $\xi_0\notin A_1$. Рассмотрим множество $I_{\xi 0} = \{\xi\in A \mid \xi\xi_0 \neq \xi_0\}$. Докажем, что $I_{\xi 0}$ является идеалом в A. Во-первых, покажем, что $I_{\xi 0}$ подполугруппа A. Для двух произвольных элементов a, b из $I_{\xi 0}$ по определению $I_{\xi 0}$ имеем: $a\xi_0 \neq \xi_0$ и $b\xi_0 \neq \xi_0$. Если предположить, что $ab\notin I_{\xi 0}$, то $ab\xi_0 = \xi_0$ и получим $a\xi_0 = aab\xi_0 = ab\xi_0 = \xi_0$, что противоречит условию леммы. Во-вторых, возьмем $a\in A\backslash I_{\xi 0}$ и $b\in I_{\xi 0}$. Это значит, что $a\xi_0 = \xi_0$ и $b\xi_0 \neq \xi_0$. Тогда $ab\xi_0 = ba\xi_0 =$ $= b\xi_0 \neq \xi_0$, т.е. мы получили, что $ab\in I_{\xi 0}$.

При этом возможно выполнение условия $A_1\subset I_{\xi 0}$. Тогда, поскольку $\xi_0\notin I_{\xi 0}$, мы для гомоморфизма φ полугруппы A в B такого, что

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} e_1, \text{если } \xi\in I_{\xi 0}, \\ e_2, \text{если } \xi\notin I_{\xi 0}, \end{cases}$$

получаем $\varphi(\xi_0)\notin \varphi(A_1)$.

Пусть $A_1\not\subset I_{\xi 0}$, тогда $A_1\cap(A \setminus I_{\xi 0}) = E_1$ – подполугруппа полугруппы $A\setminus I_{\xi 0}$. Обозначим через A_0 максимальную подполугруппу $A \setminus I_{\xi 0}$, содержащую E_1, но не содержащую ξ_0. Так как $(A\setminus I_{\xi 0}) \setminus A_0$ – вполне изолированный идеал полугруппы $A \setminus I_{\xi 0}$, то отображение φ полугруппы A в B такое, что

$$\varphi(\xi)=\begin{cases} e_1, & \text{если } \xi\in I_{\xi 0},\\ e_2, & \text{если } \xi\in (A\setminus I_{\xi 0})\setminus A_0,\\ e_3, & \text{если } \xi\in A_0,\end{cases}$$

является гомоморфизмом, причем $\varphi(\xi_0) = e_2$. Получаем $\varphi(\xi_0)\notin\varphi(A_1)$, т.е. полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу. □

Лемма 2. Если полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами в C^* относительно предиката принадлежности элемента моногенной полугруппе, то A аппроксимируема гомоморфизмами в C^* относительно предиката равенства двух элементов**.**

Доказательство. Обозначим P предикат принадлежности элемента моногенной полугруппе. Пусть a, $b\in A$, $a \neq b$ и $[a]$, $[b]$ – две моногенные подполугруппы, порожденные a и b соответственно. Тогда существуют три возможности:

1) $a\notin [b]$. Полугруппа A аппроксимируема относительно P, поэтому существует гомоморфизм φ такой, что $\varphi(a)\notin\varphi([b])$. Очевидно, что $\varphi(b)\in\varphi([b])$, и поэтому $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

2) $b\notin [a]$. Этот случай доказывается аналогично.

3) $[a] = [b]$. Так как $a \neq b$, то найдутся два натуральных числа $k \neq 1$ и $l \neq 1$ такие, что $a = b^k$ и $b = a^l$. Тогда имеем $a = (a^l)^k = a^m$, т.е. $[a]$ – конечная циклическая подполугруппа индекса 1, т.е. группа с нейтральным элементом $e = a^{m-1}$. Так как $a \neq b$, то $ab^{-1} \neq e$, и, значит, $ab^{-1}\notin [e]$. Тогда существует гомоморфизм φ в C^* такой, что $\varphi(ab^{-1})\notin\varphi([e])$. Следовательно, $\varphi(a)\varphi(b^{-1}) \neq \varphi(e)$, и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Итак, во всех трех случаях получили, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Следовательно, полугруппа A аппроксимируема относительно предиката равенства двух элементов. □

Теперь мы можем перейти к решению вопроса о минимальной полугруппе SH-аппроксимации для класса коммутативных регулярных периодических полугрупп относительно предиката принадлежности элемента подполугруппе. Приведем без доказательств три теоремы на эту тему. Краткие схемы доказательств этих теорем можно найти в [15], а подробные доказательства, как мы уже отмечали, мы предполагаем опубликовать в продолжении статьи.

Теорема 4. Пусть K – класс коммутативных регулярных и периодических полугрупп. Полугруппа C^* является минимальной полугруппой SH-аппроксимации для класса коммутативных регулярных периодических полугрупп относительно предиката принадлежности элемента подполугруппе. □

Теорема 5. Полугруппа A является аппроксимируемой гомоморфизмами из Ф относительно отношения Грина «$\mathcal{L}$-эквивалентность» тогда и только тогда, когда эта полугруппа вложена в полурешетку простых слева полугрупп[1]. □

[1] Полугруппа называется простой слева, если она не содержит собственных левых идеалов, см. [9] и др.

Теорема 6. Пусть K_1 – класс коммутативных, сепаративных и периодических полугрупп. Полугруппа C^* является минимальной полугруппой аппроксимации для класса K_1 относительно предиката принадлежности элемента моногенной подполугруппе. □

Заключение

Как мы уже отмечали в предыдущих статьях, аппроксимация полугрупп состоит из трех компонентов. Первый – это множество используемых алгебраических структур, таких как группы, полугруппы, некоторые их специальные виды и т.п. Вторым компонентом является множество рассматриваемых над этими структурами предикатов. А третий компонент – различные варианты описания множества гомоморфизмов над рассматриваемыми объектами, обычно сводящиеся к заданию ограничений на область прибытия. Изменяя какой-либо один из этих трех компонентов, мы всегда получаем новое направление для дальнейших исследований.

Например, для изучения аппроксимации гомоморфизмами в некоторое множество B (что связано с тематикой настоящей статьи, SH-аппроксимацией) желательно уметь находить минимальную подполугруппу B_1 полугруппы B такую, что A аппроксимируема гомоморфизмами в B_1.

Библиографический список

1. **Данг, В. В.** Некоторые вопросы аппроксимации полугрупп / В. В. Данг, С. Ю. Корабельщикова, Б. Ф. Мельников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 88–99.
2. **Данг, В. В.** О задаче нахождения минимальной полугруппы аппроксимации / В. В. Данг, С. Ю. Корабельщикова, Б. Ф. Мельников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 46–57.
3. **Dang, V. V.** Semigroups approximation with respect to some ad hoc predicates / V. V. Dang, S. Yu. Korabelshchikova, B. F. Melnikov // Arctic envirenmontal research. – 2017. – Vol. 17. – P. 133–140.
4. **Додонова, Н. Л.** К вопросу о слабой двойственности полугрупп / Н. Л. Додонова // Вестник Самарской государственной академии путей сообщения. – 2004. – № 1. – С. 45–49.
5. **Мальцев, А. И.** Избранные труды. Т. 1: Классическая алгебра / А. И. Мальцев. – Москва : Наука, 1976. – 484 с.
6. **Лесохин, М.** Конечная аппроксимируемость коммутативных полугрупп / М. Лесохин, Е. Голубов // Математические записки Уральского университета. – Т. 5, № 3. – 1966. – С. 82–70.
7. **Голубов, Е.** Конечная аппроксимируемость сепарабельных естественно линейно упорядоченных коммутативных полугрупп / Е. Голубов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1969. – № 2. – С. 23–31.
8. **Зяблицева, Л. В.** Некоторые специальные полугруппы и их гомоморфизмы / Л. В. Зяблицева, С. Ю. Корабельщикова, И. Н. Попов. – Архангельск : Изд-во САФУ, 2013. – 128 с.
9. **Dummit, D. S.** Abstract Algebra / D. S. Dummit, R. M. Foote. – New York : John Wiley & Sons, 2004. – 932 p.
10. **Клиффорд, А.** Алгебраическая теория полугрупп : пер. с англ. / А. Клиффорд, Г. Престон. – Москва : Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с. ; Т. 2. – 422 с.

11. **Hofmann, K. H.** Elements of Compact Semigroups / K. H. Hofmann, P. J. Mostert. – Columbus, Ohio, Merrill Publishing Company, 1966. – 423 p.
12. **Pigozzi, D.** On some operations on classes of algebras / D. Pigozzi // Algebra Universalis. – 1972. – Vol. 2. – P. 346–353.
13. **Биркгоф, Г.** Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти. – Москва : Мир, 1976. – 400 с.
14. **Додонова, Н. Л.** *SH*-аппроксимация полугрупп обобщенных характеров гомоморфизмами в конечные поля / Н. Л. Додонова, С. П. Королева, С. Ю. Корабельщикова // Математика в современном мире : сб. материалов Междунар. конф., посвящ. 150-летию Д. А. Граве (Вологодский государственный педагогический университет). – Вологда, 2013. – С. 16–17.
15. **Dang, V. V.** Minimal SH-approximation of semigroups / V. V. Dang, S. Yu. Korabelshchikova, B. F. Melnikov // Algebra and lattices in Hawaii 2018 : Proceedings of International conference. – URL: https://universalalgebra.github.io/ALH-2018

References

1. Dang V. V., Korabel'shchikova S. Yu., Mel'nikov B. F. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 88–99. [In Russian]
2. Dang V. V., Korabel'shchikova S. Yu., Mel'nikov B. F. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 4 (44), pp. 46–57. [In Russian]
3. Dang V. V., Korabelshchikova S. Yu., Melnikov B. F. *Arctic envirenmontal research*. 2017, vol. 17, pp. 133–140.
4. Dodonova N. L. *Vestnik Samarskoy gosudarstvennoy akademii putey soobshcheniya* [Bulletin of Samara State Transport University]. 2004, no. 1, pp. 45–49. [In Russian]
5. Mal'tsev A. I. *Izbrannye trudy. T. 1: Klassicheskaya algebra* [Selected works. Volume 1: Classic algebra]. Moscopw: Nauka, 1976, 484 p. [In Russian]
6. Lesokhin M., Golubov E. *Matematicheskie zapiski Ural'skogo universiteta* [Mathematical notes of Ural University]. 1966, vol. 5, no. 3, pp. 82–70. [In Russian]
7. Golubov E. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1969, no. 2, pp. 23–31. [In Russian]
8. Zyablitseva L. V., Korabel'shchikova S. Yu., Popov I. N. *Nekotorye spetsial'nye polugruppy i ikh gomomorfizmy* [Some special semigroups and their homomorphisms]. Arkhangel'sk: Izd-vo SAFU, 2013, 128 p. [In Russian]
9. Dummit D. S., Foote R. M. *Abstract Algebra*. New York: John Wiley & Sons, 2004, 932 p.
10. Klifford A., Preston G. *Algebraicheskaya teoriya polugrupp: per. s angl.* [Algebraic semi-group theory: translated from English]. Moscow: Mir, 1972, vol. 1, 286 p.; vol. 2, 422 p. [In Russian]
11. Hofmann K. H., Mostert P. J. *Elements of Compact Semigroups*. Columbus, Ohio, Merrill Publishing Company, 1966, 423 p.
12. Pigozzi D. *Algebra Universalis*. 1972, vol. 2, pp. 346–353.
13. Birkgof G., Barti T. *Sovremennaya prikladnaya algebra* [Modern applied algebra]. Moscow: Mir, 1976, 400 p. [In Russian]
14. Dodonova N. L., Koroleva S. P., Korabel'shchikova S. Yu. *Matematika v sovremennom mire: sb. materialov Mezhdunar. konf., posvyashch. 150-letiyu D. A. Grave (Vologodskiy gosudarstvennyy pedagogicheskiy universitet)* [ ]. Vologod, 2013, pp. 16–17. [In Russian]

15. Dang V. V., Korabelshchikova S. Yu., Melnikov B. F. *Algebra and lattices in Hawaii 2018: Proceedings of International conference*. Available at: https://universalalgebra.github.io/ALH-2018

Данг Ван Винь
кандидат физико-математических наук, преподаватель, Государственный политехнический институт в г. Хошимине (268 Ly Thuong Kiet, dist 10, Hochiminh city, Vietnam)

E-mail: dangvvinh@hcmut.edu.vn

Dang Van Vinh
Candidate of physical and mathematical sciences, lecturer, State Polytechnic Institute of HochiMinh (268 Ly Thuong Kiet, dist 10, Hochiminh city, Vietnam)

Додонова Наталья Леонидовна
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических методов в экономике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34)

E-mail: ndodonova@bk.ru

Dodonova Natalya Leonidovna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematical methods in economics, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia)

Корабельщикова Светлана Юрьевна
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и информационной безопасности, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (Россия, г. Архангельск, набережная Северной Двины, 17)

E-mail: s.korabelsschikova@narfu.ru

Korabel'shchikova Svetlana Yur'evna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of informatics and information security, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (17 Severnoy Dviny embankment, Arkhangelsk, Russia)

Мельников Борис Феликсович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информационных систем и сетей, Российский государственный социальный университет (Россия, г. Москва, ул. Вильгельма Пика, 4)

E-mail: bf-melnikov@yandex.ru

Mel'nikov Boris Feliksovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of information systems and networks, Russian State Social University (4 Wilgelma Pika street, Moscow, Russia)

Образец цитирования:

Данг, В. В. *SH*-слабая двойственность полугрупп и минимальная полугруппа *SH*-аппроксимации / В. В. Данг, Н. Л. Додонова, С. Ю. Корабельщикова, Б. Ф. Мельников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 1 (49). – С. 29–39. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-3.